Problèmes de mécanique continue

Exercice 1 : *Contraintes (Examen 2013)*

Dans un milieu continu, le champ de contraintes dans le système d'axes $(0,x_1,x_2,x_3)$ est donné par

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} x_1^2 x_2 & x_1(1-x_2^2) & 0 \\ x_1(1-x_2^2) & \frac{1}{3}(x_2^3 - 3x_2) & 0 \\ 0 & 0 & 2x_3^2 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Déterminez :

1. La force volumique pour que les équations d'équilibre soient satisfaites en tout point.
2. Les contraintes principales en P $(a,0,2\sqrt{a})$ où $a > 0$.
3. La contrainte de cisaillement maximale en P.
4. Dessinez le cercle de Mohr en P.
5. Calculer les valeurs propres du déviateur du tenseur des contraintes $s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij}$ en P.

Exercice 2 : *Contrainte et critères de rupture (Examen 2011)*

Une barre de diamètre d est chargée axialement par une charge P=45000N (voir figure 1).

1. Le matériau de la barre a une limite à la rupture en cisaillement de $\tau_o = 12 \times 10^6 \frac{N}{m^2}$.

   En construisant un cercle de Mohr, calculer le diamètre en dessous duquel la barre casse en cisaillement. Sur quel plan cette rupture se propage t-elle ?
2. Un autre ingénieur décide d'envisager de changer de matériaux pour passer à un critère de rupture octahédrique (avec le même τ_o)

$$\sigma_{oct} = \sqrt{\frac{2}{9}\left(I_1^2 - 3I_2\right)} < \tau_0 \tag{2}$$

   ou $I_1 = tr(\boldsymbol{\sigma})$ et $I_2 = \frac{1}{2}\left(tr\left(\boldsymbol{\sigma}^2\right) - tr\left(\boldsymbol{\sigma}\right)^2\right)$ avec $\boldsymbol{\sigma}$ tenseur des contraintes de Cauchy.

   Ce critère est-il plus ou moins contraignant ?

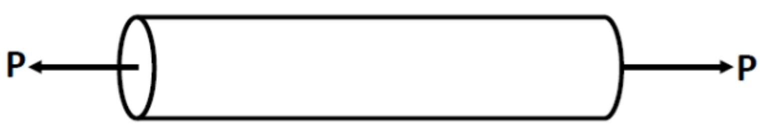
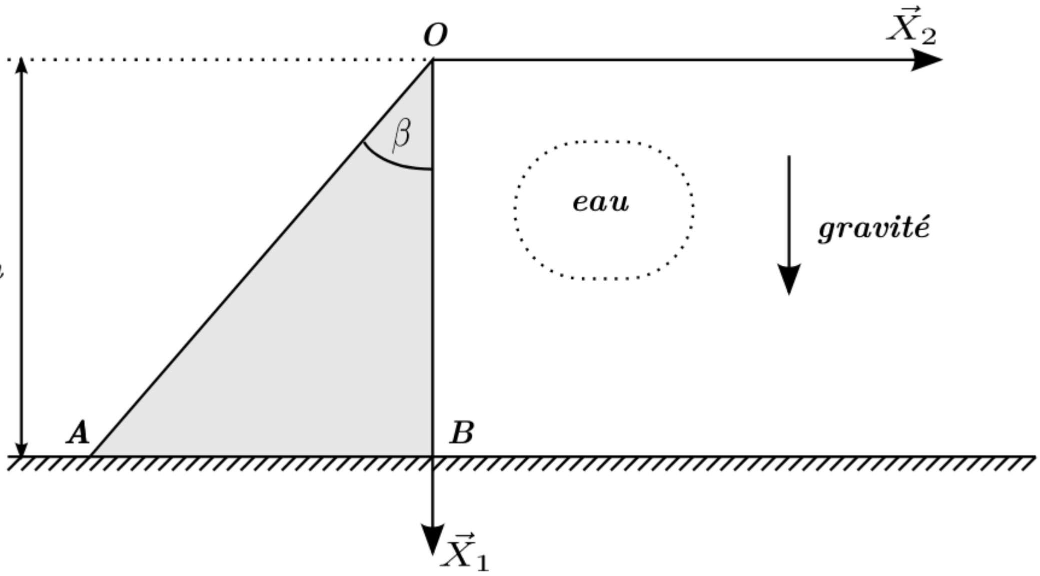


FIGURE 1 – Geométrie de la barre

Exercice 3 : *Problème de l'examen 2010*

Un jeune ingénieur se voit attribuer la mission de dresser une analyse en contrainte d'un barrage. La géométrie du problème est 2D avec pour section du barrage le triangle OAB, comme sur le schéma suivant :

Par convention, l'origine des axes est le point O présenté sur le schéma. Afin d'alléger les calculs, on choisira l'angle β égal à 45°. On suppose que la surface OA du barrage est libre de contrainte, et que l'eau atteint



le sommet du barrage (hauteur h). Notons également que la surface AB est encastrée. Enfin, on dénote par ρ_b la masse volumique du barrage.

1. L'ingénieur s'attarde tout d'abord à évaluer la contrainte imposée par l'eau sur le barrage. En faisant l'hypothèse que ce fluide admet un état de contrainte dit hydrostatique on a :

$$\underline{\sigma}_{\text{eau}} = -P_{\text{hydro}} \cdot \underline{I} \tag{3}$$

où le scalaire P_{hydro} est la pression hydrostatique.
Ecrivez les équations d'équilibre sur un volume infinitésimal d'eau afin de déterminer P_{hydro} en fonction de x_1, ρ_e (la masse volumique de l'eau), et g (le module de l'accélération de la pesanteur à la surface de la terre).
2. Déterminez alors les conditions aux limites s'appliquant sur le côté OB du barrage.
3. Donnez les conditions aux limites s'appliquant sur les autres côtés du barrage.
4. Après avoir examiné le barrage, le jeune ingénieur propose l'état de contrainte plan suivant :

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= (k - \rho_b g)\, x_1 + c x_2 + e x_1^2 && (4)\\
\sigma_{22} &= b x_1 + a x_2 + d x_2^2 && (5)\\
\sigma_{12} &= -\,(a x_1 + k x_2) && (6)
\end{aligned}$$

où a, b, c, d, e et k sont des paramètres fonction de ρ_b, ρ_e et de l'angle β.

(a) Déterminer les paramètres a et b à partir de la condition aux limites sur le côté OB.
(b) En écrivant l'équation d'équilibre d'un élément de barrage, déterminer les paramètres d et e.
(c) Déterminer les paramètres c et k du problème à partir de la condition aux limites sur le côté OA.

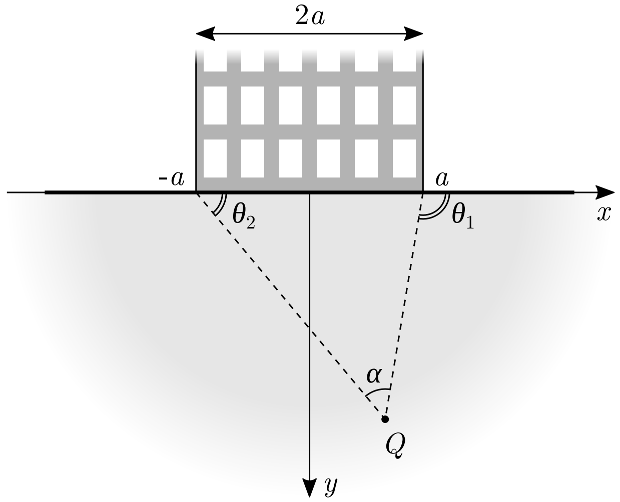
Exercice 4 : ***Contraintes dans le sol sous un bâtiment (examen 2019)***

Un bâtiment de largeur $2a$ exerce une pression verticale uniforme p sur le sol. On s'intéresse aux contraintes dans le sol, que l'on suppose constitué d'un matériau élastique linéaire isotrope.

La solution est connue en tout point Q (voir figure) dans le sol :

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= -\frac{p}{2\pi}[2(\theta_1 - \theta_2) + (\sin 2\theta_1 - \sin 2\theta_2)] \\
\sigma_{yy} &= -\frac{p}{2\pi}[2(\theta_1 - \theta_2) - (\sin 2\theta_1 - \sin 2\theta_2)] \\
\tau_{xy} &= \frac{p}{2\pi}(\cos 2\theta_1 - \cos 2\theta_2)
\end{aligned}$$

où x, y, θ_1 et θ_2 sont définis dans la figure ci-dessous.



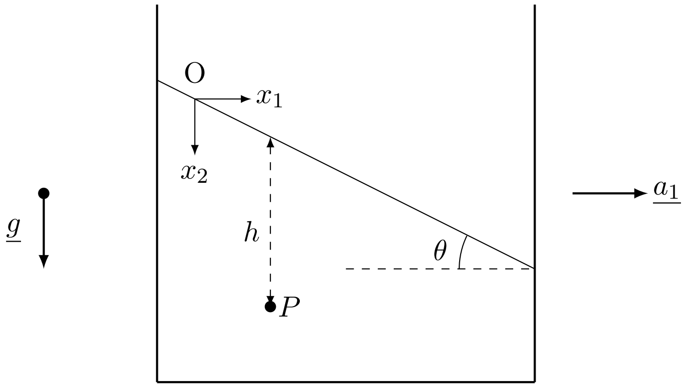
On rappelle les relations trigonométriques suivantes :

$$\cos^2 a + \sin^2 a = 1$$
$$1 - \cos 2a = 2\sin^2 a$$
$$\cos a \cos b + \sin a \sin b = \cos(a - b)$$

1. Diviser la surface du sol ($y = 0$) en trois régions. Quelles valeurs prennent θ_1 et θ_2 sur chaque région ? Vérifier que la solution satisfait les conditions aux limites à la surface du sol.
2. Vers quelles valeurs tendent les contraintes lorsque $y \to \infty$? Commenter.
3. Quelle est la valeur de τ_{xy} le long de l'axe y ? *(Indication : exprimer la relation entre θ_1 et θ_2 lorsque $x = 0$).*
4. En déduire la valeur du cisaillement maximal $\tau_m = (\sigma_I - \sigma_{II})/2$ le long de l'axe y, où σ_I et σ_{II} sont les contraintes principales.
5. Calculer la valeur et l'emplacement du maximum de τ_m sur l'axe y. *(Indication : considérer les valeurs que peuvent prendre θ_1 ou θ_2 sur l'axe y)*
6. On considère le tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}$. Écrire son polynôme caractéristique puis calculer σ_I, σ_{II} et τ_m exprimés selon A, B et C.
7. En utilisant l'expression de τ_m trouvée dans la question 6, montrer que $\tau_m = \frac{p}{\pi}\sin\alpha$ dans le sol (dans tout le milieu semi-infini), avec $\alpha = \theta_1 - \theta_2$.
8. Pour quelle valeur de α le cisaillement maximal τ_m est-il le plus grand ? Cela est-il en accord avec la question 5 ? Tracer le lieu géométrique correspondant au τ_m maximal.

Exercice 5 : ***Exercice de l'examen 2013 (exercice supplémentaire)***

Un réservoir contient un fluide homogène et bouge horizontalement vers la droite avec une accélération constante $\mathbf{a_1}$ (cf figure). L'origine du repère (x_1, x_2) est placée en un point de la surface libre.



1. Rappelez les équations d'hydrostatique pour un fluide au repos, sachant que $\sigma_{ij} = -p\ \delta_{ij}$
2. En supposant que p est une fonction de x_1 et x_2, et en utilisant les équations du mouvement, trouvez l'angle θ d'inclinaison de la surface libre (supposez qu'à la surface libre $p = p_{\text{atm}}$, la pression atmosphérique.
3. Trouvez la pression à un point P dans le fluide.